

# FORMELSAMLING FOR MAT 1100 OG MAT-INF 1100

## Eksponentialfunksjoner

**Derivasjon:**  $(a^x)' = a^x \ln a$     spesielt  $(e^x)' = e^x$   
**Identiteter:**  $a^x a^y = a^{x+y}$      $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$      $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$      $(a^x)^y = a^{xy}$

## Logaritmefunksjonen

**Derivasjon:**  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$   
**Identiteter:**  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$      $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$      $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$   
 $\ln(x^a) = a \ln x$  for  $x, y > 0$

## Trigonometriske funksjoner

**Derivasjon:**  $(\sin x)' = \cos x$      $(\cos x)' = -\sin x$   
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$      $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$   
**Identiteter:**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$   
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$   
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$   
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$   
 $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

**Eksakte verdier:**

$v$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—

## Arcusfunksjoner

**Derivasjon:**  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$      $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

## Komplekse tall

**Skrivemåter:**  $z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$   
**Eksponentialfunksjonen:**  $e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$   
**De Moivres formel:**  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

## Anvendelser av integrasjon

**Volum av omdreiningslegemer:** om  $x$ -aksen:  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$   
om  $y$ -aksen:  $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

**Buelengde:**  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

## Lineær algebra og funksjoner av flere variable

**Vektorprodukt:**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

**Determinanter:**  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**Gradient:**  $\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$

## Differens- og differensialligninger

**Annendens differensligning**  $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ :

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n \cos(n\theta) + D\rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

**Annendens differensialligning**  $y'' + py' + qy = 0$ :

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1x} + De^{r_2x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

## Numeriske formler

**Newtons metode:**  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**Taylor's formel:**  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

**Trapesmetoden:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$

**Simpsons formel:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$

**Eulers metode:** Førsteordens ligning:  $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Annendens ligning:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + hDy_{n-1} \\ Dy_n = Dy_{n-1} + hg(x_{n-1}, y_{n-1}, Dy_{n-1}) \end{cases}$$