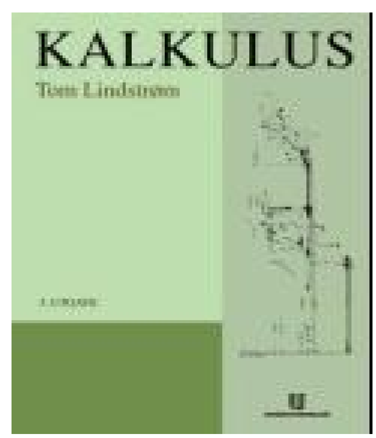
# PENSUM

MAT1100

H11


*Flervariabel analyse med lineær algebra, Tom Lindstrøm og Klara Hovberg*

*Kalkulus, Tom Lindstrøm, 3. Utgave*

Joakim Myrvoll Johansen

# MAT1100

# Pensum fra “Kalkulus”

## *KAP3 – KOMPLEKSE TALL*

✗ **3.1**

✗ **3.2**

- Geometrisk tolkning:
  Tenk på vektoren (a,b) som det komplekse tallet z = a + ib.
- Polarkordinater:
  - Modulus:

    $$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

  - Argument:

    $$\cos\theta=\frac{a}{r}$$

    $$\sin\theta=\frac{b}{r}$$

- Polarform:

  $$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

- 3.2.3 Teorem

  $$y=a+ib,\, w=c+id,\, z=y\cdot w$$

  Polarkordinatene til z er da lik:
  - modulus: produktet av modulusene til y og w
  - argument: summen av argumentene til y og w

✗ **3.3**

- 3.3.1 Definisjon:
  Komplekst tall: z = a + ib

  $$e^z=e^a\cdot(\cos b+i\sin b)$$

  Polarkordinater, $e^z$:
  - modulus: $e^a$
  - argument: b
- 3.3.4 Setning:
  For alle komplekse tall z, w er:

  $$e^{z+w}=e^z\cdot e^w$$

- De Moivres Formel:

  $$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

✗ **3.4**

- 3.4.1 Definisjon:

  $$w^n = z$$

  *w* er *n*-te roten til *z*
- N-te rot:
  - Metode 1:

    $$w_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\theta + 2ki\pi)}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n})$$

  - Metode 2:

    $$w_k = w_{k-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

- Komplekse annengradslikninger:
  - Setning:

    $$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

    1. hvis $b^2 > 4ac$ ==> to reelle røtter
    2. hvis $b^2 = 4ac$ ==> en reell rot
    3. hvis $b^2 < 4ac$ ==> to komplekse røtter (som er konjugerte av hverandre)

✗ 3.5

- 3.5.1 Algebraens fundamentalteorem

  La

  $$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0$$

  være et komplekst n-te grads polynom. Da finnes det komplekse tall $r_1$, $r_2$ ..., $r_n$ slik at

  $$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_n)$$

  for alle komplekse tall z. Bortsett fra rekkefølgen er faktorene $(z - r_1)$, $(z - r_2)$, ..., $(z - r_n)$ entydig bestemt.
- Reell faktorisering, 3.5.3 Lemma:

  La

  $$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0$$

  være et reel polynom (dvs. Ar $c_n$, $c_{n-1}$, $c_{n-2}$, ..., $c_1$, $c_0$ er reelle tall). Dersom r er en rot i P, så er den konjugerte $\bar{r}$ også en rot.
- 2.5.5 Korollar

  Ethvert reelt polynom av odde grad har en reell rot

## *KAP4 - FØLGER*

✗ **4.3**

- 4.3.1 Definisjon:
  Følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot et tall a dersom det for ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ (uansett hvor lite), finnes et tall N som er element av alle naturlige tall ( $N \in \mathbb{N}$ ) slik at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$
  (Symbolet ε er den greske bokstaven epsilon som det er vanlig å bruke i definisjoner av denne typen). I så fall skriver vi

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

  En følge som konvergerer mot et tall kalles konvergent, mens en følge som ikke konvergerer kalles divergent. Istedenfor $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ skriver man av og til « $a_n \to a$ når $n \to \infty$».

## *KAP5 – KONTINUERLIGE FUNKSJONER*

✗ **5.1**

- 5.1.1 Definisjon:
  En funksjon f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ dersom følgende gjelder:
  for enhver $\varepsilon > 0$ (uansett hvor liten), finnes det en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
  - Eksempel:
    $f(x) = 5x + 2$, sjekk kontinuitet i punktet $a = 2$.
    Innfører størrelsen $h = x - 2$ ==> $x = 2 + h$
    Tenker oss $\varepsilon > 0$, og at vi må finne en $\delta > 0$ slik at når $|h| = |x - 2| < \delta$, så er $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$.
    $|f(x) - f(2)| = |(5x + 2) - (5 \cdot 2 + 2)| = |5x - 10| = |5(2 + h) - 10| = 5|h|$
    Hvis vi velger $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ , så ser vi at dersom

    $|h| = |x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$ , så er $|f(x) - f(2)| = 5|h| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$

    Dermed har vi vist at f er kontinuerlig i punktet $a = 2$.

✗ **5.2 Skjæringssetningen**

- 5.2.1 Skjæringssetningen:
  Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon hvor f(a) og f(b) har motsatt fortegn. Da finnes et tall $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.
- 5.2.2 Korollar
  Anta at $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ og $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuelige funksjoner slik at $g(a) < h(a)$ og $g(b) > h(b)$. Da finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $g(c) = h(c)$.

- ✗ **5.3 Ekstremalverdisetningen**
  - Ekstremalverdisetningen:
    La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har f både maksimums- og minimumspunkter.

- ✗ **5.4 Grenseverdier**
  Grenseverdier har du truffet før. Selv om språkdrakten kanskje er litt annerledes, er det ikke mye nytt her siden videregående skole.

## *KAP6 – DERIVERBARE FUNKSJONER*

- ✗ **6.1**
  - 6.1.1 Definisjon:
    Anta at f er definert i en omegn om punktet a (det vil si at det finnes et intervall (a – c, a + c) slik at f(x) er definert for alle x i dette intervallet). Dersom grenseverdien:

    $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

    eksisterer, sier vi at f er dervierbar i a. Vi skriver

    $$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

    og kaller denne størrelsen for den deriverte til f i punktet a.
  - Regneregler:
    - Derivasjon av elementære funksjoner:
      $D[a] = 0$
      $D[x^a] = ax^{a-1}$
      $D[a^x] = a^x \ln a$ $(a > 0)$, spesielt er $D[e^x] = e^x$
      $D[\ln|x|] = 1/x$
      $D[\sin x] = \cos x$
      $D[\cos x] = - \sin x$
      $D[\tan x] = 1 / (\cos^2 x)$
    - Derivasjonsregler:
      Anta at funksjonene f og g er deriverbare i punktet a, og at c er en konstant. Da er også funksjonene cf, f + g, f – g, f · g og (forutsatt at $g(a) \neq 0$) f/g deriverbare i a. Deres deriverte er gitt ved:
      1. $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$
      2. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
      3. $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
      4. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
      5. $(f/g)'(a) = (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)) / g(a)^2$
    - Kjerneregelen:
      Anta at g er deriverbar i a og at f er deriverbar i g(a). Da er den sammensatte funksjonen h(x) = f[g(x)] deriverbar i a, og

      $$h'(a) = f'[g(a)]\, g'(a)$$

- 6.1.7 Setning
  Anta at f er deriverbar i punktet a. Da finnes det en funksjon η slik at
  $$f(a + h) = f(a) + f'(a)\,h + \eta(h)h$$
  og $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$ og $\eta(0) = 0$
- 6.1.9 Setning
  Dersom f er deriverbar i et punkt a, er den også kontinuerlig i a.
- Logaritmisk derivasjon, 6.1.10 Setning:
  Hvis f er deriverbar og forskjellig fra 0 i punktet x, så er
  $$f'(x) = f(x) \cdot D[\ln|f(x)|]$$

✗ **6.2 Middelverdisetningen**

VIKTIG FOR KURSET!

- 6.2.1 Setning
  Anta at funksjonen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ har et maksimum eller et minimum i et indre punkt $c \in (a,b)$. Dersom f er deriverbar i c, må $f'(c) = 0$
- 6.2.2 Rolles teorem
  Anta at funksjonen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Anta videre at $f(a) = f(b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at $f'(c) = 0$
- 6.2.3 Middelverdisetningen:
  Anta at funksjonen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at
  $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- 6.2.5 Korollar:
  Anta at f er kontinuerlig i intervallet [a,b]. Dersom $f'(x) \geqslant 0$ for alle indre punkter $x \in (a,b)$, er f voksende på [a,b]. Dersom $f'(x) \leqslant 0$ for alle $x \in (a,b)$, er f avtagende på [a,b]. Dersom vi isteden har strenge ulikheter (henholdsvis $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ for alle indre punkter x), så er funksjonen strengt voksende eller strengt avtagende.

✗ **6.3 L'Hôpitals regel og ubestemte uttrykk**

- 6.3.1 Cauchys middelverdisetning:
  Anta at $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Da finnes der en $c \in (a,b)$ slik at
  $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
- L'Hôpitals regel (gjelder for 0/0 og $\infty/\infty$)
  Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (eller $\infty$) og at grenseverdien
  $$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
  eksisterer. Da eksisterer også grenseverdien $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ og
  $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
  (deriver funksjonen, dersom L`Hôpitals regels fortsatt er gjeldende gjenta prosedyren)

- 6.3.15 Setning
  a)
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 \quad \textit{for alle } a, b > 0$$
  b)
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0 \quad \textit{for alle } a, b > 0$$

## ✗ 6.4 Kurvedrøfting

- Kritisk punkt, 6.4.2 Setning:
  Anta at funksjonen f : [a,b] → ℝ har et lokalt maksimum eller minimum i c. Da er enten:
  1. c et av endepunktene a eller b
  2. f '(c) = 0 (da finner du alle de kritiske punktene utenom endepunktene)
  3. f er ikke deriverbar i c
- Finn maksimums- og minimumspunktene til en funksjon
  1. Deriver funksjonen
  2. f '(x) = 0
  3. Sett verdiene inn i et fortegnsskjema
  4. Finn alle topp- og bunnpunkter (husk endene)
  5. Sett verdiene inn i f(x), og se hvilke som er maksimums- og minimumspunkt
- Konvekse og konkave funksjoner
  1. Dobbelderiver funksjonen
  2. Sett verdiene inn i fortegnsskjema
  3. Der f ''(x) er positiv (smiler) er konveks og der den er negativ (sur) er den konkav (mellom kalles gjerne vendepunkter)

## ✗ 6.5 Asymptoter

- Vertikal asymptote:
  Funksjonen har en vertikal asymptote dersom x går mot en konstant a
  - Metode for å finne vertikal asymptote:
    Eksempel:
    $f(x) = e^{1/(x-2)}$ , finn de vertikale asymptotene
    Siden f(x) er kontinuerlig for alle bortsett fra x = 2, er det bare muligheter for en vertikal asymptote når x nærmer seg 2.
    Da lar vi funksjonen nærme seg to fra begge sider:
    $$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty$$
    x = 2 er en asymptote for f når x nærmer seg 2 ovenfra
    $$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$
    funksjonen har ikke en asymptote når x nærmer seg 2 nedenfra

– Horisontal asymptote:
Definisjon:
Dersom $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = C \in \mathbb{R}$
sier vi at linja y = C er en horisontal asymptote for f i +- $\infty$
  - Metode for å finne horisontale asymptoter:
    Eksempel:
    $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + 1) / (4x^3 - x + 8)$, har linja y = 3/4 som asymptote

– Skråasymptoter:
  - 6.5.3 Definisjon:
    Linjen y = ax + b er en (skrå) asymptote for funksjonen f n$\infty$x går mot null går x mot $\infty$;
    det vil si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

    Tilsvarende sier vi at linjen y = ax + b er en (skrå) asymptote for funksjonen f når x går mot minus uendelig dersom

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

  - 6.5.5 Metode for å finne skråasympoter
    For å finne eventuelle asymptoter for funksjonen f når $x \to \infty$, går vi frem som følger:
    1. Beregn
    $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$
    Dersom denne grensen ikke finnes, er det ingen asymptote. Dersom grenseverdien finnes (svaret lik a), så
    2. Beregn $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$
    Dersom denne grensen ikke finnes, er det ingen asymptote. Dersom grenseverdien finnes (svaret lik b), så er y = ax + b en asymptote for f når $x \to \infty$

## *KAP7 – ANVENDELSER OG UTVIDELSER*

✗ **7.1**

– Areal og omkrets:
  - sirkel: $A = \pi \cdot r^2$, $O = 2\pi r$

– Volum og overflate:
  - Pyramide: $V = (G \cdot h) / 3$
  - Sylinder: $V = \pi r^2 h$
  - Kjegle: $V = (\pi r^2 h) / 3$
  - Kule: $V = (4 \pi r^3) / 3$

✗ **7.2 Koblede hastigheter**

– Lær å se sammenhenger

✗ **7.4 Omvendte funksjoner**

– 7.4.5 Teorem

Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og strengt voksende, så er den omvendte funksjonen $g = f^{-1}$ kontinuerlig og strengt voksende med definisjonsmengde $D_g = D_f = [f(a), f(b)]$. Hvis f er kontinuerlig og strengt avtagende, så er $g = f^{-1}$ kontinuerlig og strengt avtagende med definisjonsmengden $D_g = D_f = [f(b), f(a)]$

– 7.4.6 Teorem

Anta at f er kontinuerlig, strengt monoton funksjon som er deriverbar i punktet x med $f'(x) \neq 0$. Da er den omvendte funksjonen $g = f^{-1}$ deriverbar i punktet $y = f(x)$, og

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

✗ **7.5 Cotangens**

– Cotangens er definert ved:

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x} \quad \textit{eller} \quad \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

– Derivert:

$$D[\cot x]=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

✗ **7.6 Arcusfunksjonene**

– Arcussinus

- 7.6.1 Definisjon:
  La $f : [-\pi/2 , \pi/2] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \sin x$. Da er f injektiv med verdimengde $V_f = [-1,1]$, og den omvendte funksjonen $f^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2 , \pi/2]$ kalles arcussinus og betegnes med $f^{-1}(x) = \arcsin x$
- 7.6.2 Setning:
  Funksjonen arcsin x er kontinuerlig og strengt voksende med derivert

$$D[\arcsin x]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

– Arcuscosinus:

- 7.6.3 Definisjon:
  La $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \cos x$. Da er f injektiv, og den omvendte funksjonen kalles arcuscosinus og skrives $f^{-1}(x) = \arccos x$
- Derivert:

$$D[\arccos x]=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

– Arcustangens:

- 7.6.3 Definisjon:
  La $f : (-\pi/2 , \pi/2) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \tan x$. Da er f injektiv, og den omvendte funksjonen kalles arcustangens og skrives $f^{-1}(x) = \arctan x$

- Derivert:

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$$

– Arcuscotangens:

- 7.6.3 Definisjon;
  La f : (0, π) → ℝ være gitt ved f(x) = cot x. Da er f injektiv, og den omvendte funksjonen kalles arcuscotangens og skrives $f^{-1}(x) = \text{arccot}\, x$
- Derivert:

$$D[\text{arccot}\, x] = -\frac{1}{1+x^2}$$

## *KAP8 - INTEGRASJON*

✗ **8.1 – Geometrisk beregninger av areal og volum**

–

✗ **8.2 – Definisjon av integralet**

– 8.2.1 Definisjon
Anta at

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

er en begrenset funksjon. Dersom:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

sier vi at f er integrerbar på [a,b], og definerer integralet

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ved:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

– 8.2.3 Setning
Enhver monoton funskjon er integrerbar

- 8.2.4 Korollar
  Hvis

  $$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

  er en monoton funksjon, så er

  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

  der $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ er en inndeling av intervallet [a,b] i n like store deler, og:

  $$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

## ✗ **8.3 – Analysens fundamentalteorem**

- 8.3.1 Setning
  Anta at:

  $$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

  er begrenset, og at

  $$c\in(a,b)$$

  Da er :

  $$(i)\quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

  $$(ii)\quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

- 8.3.2 Lemma
  Anta at F og G er to antideriverte til f på intervallet [a,b]. Da finnes en konstant C, slik at:

  $F(x) = G(x) + C$

  for alle $x\in(a,b)$

- 8.3.3 Analysens fundamentalteorem
  Anta at

  $$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

  er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall [a,x] der $a \le x \le b$ og funksjonen

  $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

  er en antiderivert til f på [a,b]

- 8.3.4 Korollar
  Anta at

  $$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

  er kontinuerlig, og at K er en antideriver til f. Da er

  $$\int_a^b f(x)dx = K(b)-K(a)$$

✗ **8.4 – Det ubestemte integralet**

- 8.4.1 Definisjon
  Vi definerer det ubestemte intgralet
  $$\int f(x)dx$$
  til å være den generelle antideriverte til f. Siden de to antiderverte er like opp til en konstant, betyr det at
  $$\int f(x)dx$$
  er lik en spesiell antiderivert pluss en vilkårlig konstant. Legg merke til at det ubestemte integralet
  $$\int f(x)dx$$
  bare er definert når f har en antiderivert
- Ubestemte integraler:

$$\int a\,dx = ax + C \qquad (a \text{ er en konstant})$$
$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \text{ er konstant}, a \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$
$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$$

- 8.4.3 Setning
  Anta at f og g er kontinuerlige funksjoner og at a er en konstant. Da gjelder:

$$(i) \qquad \int a f(x)dx = a\int f(x)dx$$
$$(ii) \qquad \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$(iii) \qquad \int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
$$(iv) \qquad \text{Dersom } \int f(x)dx = F(x)+C \text{ og } a \neq 0, \text{ så er } \int f(ax)dx = \frac{F(ax)}{a} + C$$

– 8.4.5 Setning
Dersom g er deriverbar, f er kontinuerlig og F er en antiderivert av f, så er

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = F[g(x)]+C$$

## ✗ 8.5 – Riemann-summer

**(d**en *-merkede delen av denne seksjonen er ikke pensum)

– 8.5.1 Definisjon
Gitt en funksjon f, er partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ og et utvalg $U = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ definerer vi Riemann-summen.

$$R(\Pi, U)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

– 8.5.2 Definisjon
funksjonen

$$f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$$

er Riemann-integrerbar dersom det finnes et tall α slik at

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n)=\alpha$$

for alle følger $\{\Pi_n, U_n\}$ av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n|$ --> 0. Denne felles grenseverdien α kalles Riemann-integralet til f over [a,b]

– 8.5.3 Teorem
Darboux – Riemann-integralet er det samme; en funksjon er Darboux-integrerbar hvis og bare hvis den er Riemann-integrerbar, og verdien av de to integralene alltid er den samme.

– 8.5.4 Korollar
Anta at $\{\Pi_n, U_n\}$ er en følge av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n|$ --> 0. Da er

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n)=\int_a^b f(x)dx$$

**e**ller med andre ord

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)dx$$

(her er $N_n$ antall delintervaller i partisjon $\Pi_n$)

- 8.5.5 Setning
  Anta at

  $$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

  er to integrerbare funksjoner, og at k er et reelt tall. Da gjelder:

  $$(i) \quad \text{Funkajonen } kf \text{ er integrerbar, og}$$

  $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

  $$(ii) \quad \text{Funksjonene } f+g \text{ og } f-g \text{ er integrerbare, og}$$

  $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

  $$og$$

  $$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

## ✗ 8.6 – Anvendelser av integralet

- 8.6.1 Arealet under en graf
  Dersom $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
  er en integrerbar funksjon slik at f(x) ≥ 0 for alle $x \in [a, b]$
  , så er arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen og de to loddrette linjene x = a og x = b gitt ved

  $$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

  Dersom f(x) ≤ 0 for alle $x \in [a, b]$ , så er arealet isteden

  $$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

  Arealet avgrenset av grafen til to integrerbare funksjoner f(x) ≥ g(x) og de to loddrette linjene x = a og x = b er gitt ved:

  $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

- 8.6.3 Volum til omdreiningslegeme
  Volumet som fremkommer når grafen til en positiv, kontinuerlig funksjon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
  dreies om x-aksen, er

  $$V = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

- 8.6.7 Lengden til en graf
  Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert. Da er lengden av grafen til f gitt ved:
  $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$
- 8.6.9 Definisjon
  Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. Da er lengden L av grafen til f definert ved:
  $$L=\sup\ \{\lambda(\Pi):\Pi\ \ \textit{er en partisjon av}\,[a,b]\}$$
- 8.6.10 Sammenheng mellom kraft og arbeid
  Der arbeidet som en kraft K(s) utfører over en strekning [a,b] er gitt ved
  $$A=\int_a^b K(s)\,ds$$

## *KAP9 – INTEGRASJONSTEKNIKK*

✗ **9.1 – Delvis integrasjon**

- Formel:
  $$\int u(x)v'(x)\,dx\ =\ u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx$$
- Typiske situasjoner:
  $$\int xe^x\,dx$$
  $$\int x^2\cos x\,dx$$
  $$\int \ln x\,dx$$
  $$\int x\arctan x\,dx$$
  $$\int e^x\sin x\,dx$$

✗ **9.2 - Substitusjon**

– 9.2.1 Setning

Dersom g er deriverbar, f er kontinuerlig, og F er en antiderivert til f, så er

$$\int f[g(x)]g'(x)dx \;=\; F[g(x)]+C$$

- Eksempel:

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$$

*Vi har lyst til å sette* $u=g(x)=\sqrt{x}+1$, *men mangler faktoren* $g'(x)$ *som vi trenger for å bruke setning 9.2.1. La oss regne videre alikevel. Løser vi ligningen* $u=\sqrt{x}+1$ *for* $x$, *får vi:*

$$x=(u-1)^2,$$

*og deriverer vi med hensyn p åu, gir dette:*

$$\frac{dx}{du}=2(u-1)$$

*Vi skriver dette som* $dx=2(u-1)du$, *og setter* $\in$ *i integralet:*

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\int \frac{1}{u}2(u-1)du=\int (2-\frac{2}{u})du$$

*Dette integralet kan vi løse:*

$$I=\int (2-\frac{2}{u})du=2\mathrm{u}-2\ln|u|+C=2(\sqrt{x}+1)-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

- 9.2.3 Setning
  Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar og er strengt monoton. La h være den omvendte funksjonen til g, og anta at h'(x) er kontinuerlig. Da er

$$\int f[g(x)]dx = \int f(u)h'(u)du \Bigg|_{u=g(x)}$$

  der siste del er funksjonen vi får ved først å integrere f(u)h'(u) og så erstatte u med g(x)

- 9.2.7 Setning
  Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar og strengt monoton på intervallet [a,b]. La h være den omvendte funksjonen til g og anta at h' er kontinuerlig. Da er

$$\int_a^b f[g(x)]dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)h'(u)du$$

✗ **9.3 – Delbrøkoppspalting**

- Opptrer på formen:

$$\int \frac{A}{x+a}dx$$

$$\int \frac{x+a}{(x+b)^n}dx = \int \frac{A}{x+b}dx + \int \frac{B}{(x+b)^2}dx + \ldots + \int \frac{\acute{A}}{(x+b)^n}dx$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$\int \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^m}$$

- Eksempel:

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}dx \Bigg|_{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2$$

$$= Ax^3+Ax-Ax^2-A+Bx^3+B+Cx^2-Cx+Dx-D$$

$$= Ax^3+(-A+B+C)x^2+(A-C+D)x+(-A+B-D)$$

$$= 2x^3+0x^2+0x-1$$

$$\begin{aligned} &A=2 \\ &-A+B+C=0 \\ &A-C+D=0 \\ &-A+B-D=-1 \\ &\qquad\downarrow \end{aligned}$$

$$A=2 \quad ,B=\frac{1}{2} \quad ,C=\frac{3}{2} \quad ,D=-\frac{1}{2}$$

### ✗ 9.5 – Uegentlige integraler

- 9.5.1 Definisjon
  La $f:[a,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon. Dersom integralet $\int_a^b f(x)dx$ nærmer seg en (endelig) grenseverdi L når b --> ∞, skriver vi:

$$L=\int_a^\infty f(x)dx$$

- 9.5.4 Setning
  Integralet

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

  konvergerer for p > 1 og divergerer for p ≤ 1

- 9.5.5 Definisjon
  Dersom $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ er kontinuerlig, sier vi at integralet $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ konvergerer hvis begge de to integralene

$$\int_0^\infty f(x)dx \qquad og \qquad \int_{-\infty}^0 f(x)dx$$

  konvergerer. I så fall definerer vi:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^\infty f(x)dx$$

- 9.5.6 Definisjon
  Dersom $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig, sier vi at integralet $\int_a^b f(x)dx$ konvergerer hvis grenseverdien
  $$\lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)dx$$
  eksisterer. I så fall skriver vi:
  $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)dx$$
  Dersom g er kontinuerlig på (a,b], definerer vi tilsvarende
  $$\int_a^b g(x)dx=\lim_{y\to b^+}\int_y^b g(x)dx$$
  forutsatt at denne eksisterer.

- 9.5.8 Setning
  Integralet
  $$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$
  konvergerer for p < 1 og divergerer for p ≥ 1

- 9.5.9 Definisjon
  La $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ være kontinuerlig og la $d\in(a,b)$. Vi sier at intgralet $\int_a^b f(x)dx$ konvergerer dersom begge integralene
  $$\int_a^d f(x)dx \quad og \quad \int_d^b f(x)dx$$
  konvergerer. I så fall:
  $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$$
  Anta at g er definert og kontinuerlig i alle punkter i intervallet [a,b] bortsett fra et indre punkt c. Da konvergerer integralet $\int_a^b f(x)dx$ hvis begge de to integralene
  $$\int_a^c f(x)dx \quad og \quad \int_c^b f(x)dx$$
  konvergerer og i så fall er:
  $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

– 9.5.11 Sammenligningskriteriet
La $f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ være to kontinuerlige, positive funksjoner og anta ay f(x) ≥ g(x) for alle $x \in [a, \infty)$ .

$$(i) \qquad Hvis \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ } konvergerer\text{, } så \text{ } gjør \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ } det \text{ } også$$

$$(ii) \qquad Hvis \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ } konvergerer\text{, } så \text{ } gjør \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ } det \text{ } også$$

– 9.5.13 Grensesammenligningskriteriet
La $f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ vøre to positive, kontinuerlige funksjoner

$$(i) \qquad Anta \text{ } at \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ } konvergerer\text{, } og \text{ } at \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty. \text{ } Da \text{ } konvergerer \text{ } også \int_a^\infty g(x)\,dx$$

$$(ii) \qquad Anta \text{ } at \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ } divergerer\text{, } og \text{ } at \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0. \text{ } Da \text{ } divergerer \text{ } også \int_a^\infty g(x)\,dx$$

# Pensum fra “Flervariabel analyse med lineær algebra”

## *KAP1 – VEKTORER OG MATRISER*

Dette kapitlet handler om vektorer og matriser — to viktige hjelpemidler i de neste kursene du tar. Kapitlet er ikke så veldig vanskelig, men det er viktig å få med seg dette stoffet med tanke på alle bruken du skal gjøre av det senere.

✗ **1.1 – Algebra for n-tupler**

– Definisjon
Et n-tuppel er et uttrykk $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er reelle tall. Vi ser at (2,−1, 7, 3) er et 4-tuppel, mens (0, 1, π, 3/2 ,−7, 3) er et 6-tuppel. To n-tupler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ regnes som like dersom de inneholder de samme tallene i samme rekkefølge, dvs. hvis $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Legg merke til at (3, 2, 4) 6= (2, 3, 4); selv om tallene er de samme, er rekkefølgen forskjellig.

– Regning med n-tupler
Dersom $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, så er:

- $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
- $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$
- $sa = (sa_1, sa_2, \ldots, sa_n)$
- $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ (tall/skalar)

– Regneregler for n-tupler

Dersom a, b og c er n-tupler og s og t er reelle tall, gjelder følgende regneregler:

(a) a + b = b + a

(b) a · b = b · a

(c) s(a + b) = sa + sb

(d) (s + t)a = sa + ta

(e) c · (a + b) = c · a + c · b og (a + b) · c = a · c + b · c

(f ) (sa) · b = a · (sb) = s(a · b)

(g) a · a ≥ 0 med likhet hvis og bare hvis a = 0

– Rad-/søylevektor

- Liggende n-tupler (radvektor):
  **a** = ($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$)
- Stående n-tupler (søylevektor):

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- Oversikt:

$$s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 + tb_1 + rc_1 \\ sa_2 + tb_2 + rc_2 \\ \vdots \\ sa_n + tb_n + rc_n \end{pmatrix}$$

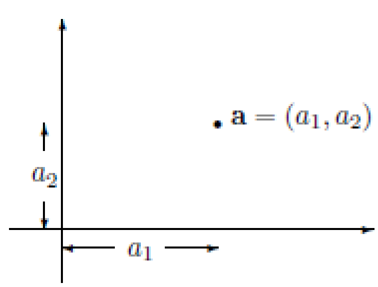
kan virke mer oversiktlig enn

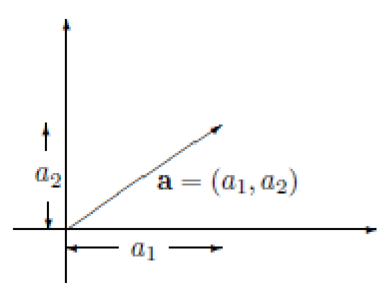
$$s(a_1, a_2, \ldots, a_n) + t(b_1, b_2, \ldots, b_n) + r(c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$

$$= (sa_1 + tb_1 + rc_1, sa_2 + tb_2 + rc_2, \ldots, sa_n + tb_n + rc_n)$$

### ✗ 1.2 – Geometri for n-tupler

– 2-tuppel; punkt/vektor



- Parallellitet
  to (ikke-null) vektorer **a**, **b** er parallelle dersom det finnes et tall $s \neq 0$ slik at $a = sb$

- Ortogonale (dvs. står normalt på hverandre)
  Dersom $a \cdot b = 0$.

- Lengden $|a|$ til vektoren $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ kan regnes ut fra koordinatene:

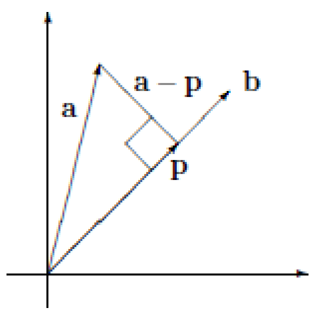
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

- Terminologi
  Mengden $R^n$ av alle n-tupler kalles det n-dimensjonale euklidske rommet, og et n-tuppel **a** kalles også en n-dimensjonal vektor eller et n-dimensjonalt punkt

- 1.2.1 Setning – Pythagoras' setning for n-tupler
  *Dersom* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *er ortogonale, så er*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

- Projeksjon av **a** ned på **b**




  Anta at **a** og **b** er to ikke-null vektorer i $R^n$. Da er projeksjonen p av **a** ned på **b** gitt ved:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

  Lengden til projeksjonen er gitt ved:

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

- 1.2.3 Setning – Schwarz' ulikhet
  For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder

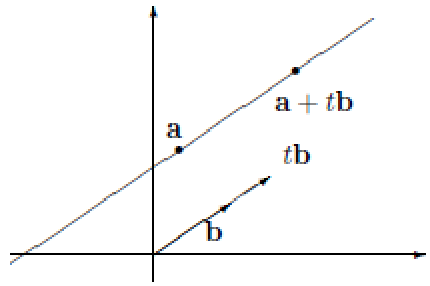
  **$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$**

  Vi har likhet (dvs. **$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$**) hvis og bare hvis **a** og **b** er parallelle eller minst en av dem er null.

- 1.2.4 Setning – Trekantulikheten
  For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gjelder

  **$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$**

- r(t) – et punkt som beveger seg langs linjen når t endrer seg




Bruker vi koordinater, ser vi at hvis **a** = ($a_1$, $a_2$, . . . , $a_n$) og **b** = ($b_1$, $b_2$, . . . , $b_n$), så blir
**r**(t) = **a** + t**b** = ($a_1$ + t$b_1$, $a_2$ + t$b_2$, . . . , $a_n$ + t$b_n$)

- a · b = |a||b| cos v

✗ **1.3 – Komplekse n-tupler**

Som nevnt tidligere kalles mengden av alle komplekse n-tupler for $C^n$. Addisjon og subtraksjon av komplekse n-tupler foregår komponentvis akkurat som i det reelle tilfellet. Også multiplikasjon med skalar (som nå godt kan være kompleks) foregår akkurat som før.

- Skalaprodukt:
  Liten justering:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}$$

- Regneregler for komplekse n-tupler

  *(a)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

  *(b)* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \overline{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}$

  *(c)* $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$

  *(d)* $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$

  *(e)* $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ *og* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

  *(f)* $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ *og* $\mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = \overline{s}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

  *(g)* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

- Setning 1.3.2
  For komplekse vektorer **a, b** gjelder:
  (i) (Pythagoras' setning) Dersom $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er ortogonale, så er |**a**|2 + |**b**|2 = |**a** + **b**|2
  (ii) (Schwarz' ulikhet) For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er |**a** · **b**| # |**a**||**b**|
  (iii) (Trekantulikheten) For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er |**a** + **b|** # |**a**| + |**b**|

✗ **1.4 – Vektorproduktet**

- Kryssprodukt

  Enhetsvektorene (tre dimensjoner)

  **i** = (1,0,0) **j** = (0,1,0) **k** = (0,0,1)

  Gitt to vektorer **a** = ($a_1$, $a_2$, $a_3$) og **b** = ($b_1$, $b_2$, $b_3$) i $R^3$ definerer vi nå vektorproduktet (ogs°a kalt kryssproduktet) **a** × **b** ved:

  **a** × **b**

  = ($a_2b_3 - a_3b_2$, $a_3b_1 - a_1b_3$, $a_1b_2 - a_2b_1$)

  = ($a_2b_3 - a_3b_2$)**i** + ($a_3b_1 - a_1b_3$)**j** + ($a_1b_2 - a_2b_1$)**k**

  Huskeregel:

  $$\begin{array}{cccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_3b_2\mathbf{i} & -a_1b_3\mathbf{j} & -a_2b_1\mathbf{k} & a_2b_3\mathbf{i} & a_3b_1\mathbf{j} & a_1b_2\mathbf{k} \end{array}$$

- 1.4.1 Setning

  For vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gjelder:

  *(a)* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

  *(b)* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *og* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

  *(c)* $\mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *og* $(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *der* $s \in \mathbf{R}$

  *(d)* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *står ortogonalt på både* **a** *og* **b**

  *(e)* (Lagranges identitet) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

- 1.4.2 Setning

  La **a** og **b** være to vektorer i $R^3$ og kall vinkelen mellom dem v. Da har vektorproduktet **a** × **b** lengde |**a**||**b**| sin v og står normalt på både **a** og **b**. Retningen til **a** × **b** er gitt ved høyrehåndsregelen.

- 1.4.3 Setning

  Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene **a** og **b** er lik |**a** × **b**|. Arealet til trekanten utspent av **a** og **b** er 1/2 |**a** × **b**|

- 1.4.4 Setning

  Volumet til parallellepipedet utspent av vektorene **a**, **b**, **c** er |(**a** × **b**) · **c**|

  - Bemerkning:

    Når vi skal regne ut volumet til parallellepipedet utspent av **a**, **b** og **c**, spiller selvfølgelig ikke rekkefølgen av de tre vektorene noen rolle. Volumet kan derfor skrives som både |(**a** × **b**) · **c**|, |(**a** × **c**) · **b**|, |(**b** × **a**) · **c**|, |(**b** × **c**) · **a**|, |(**c** × **a**) · **b**|, og |(**c** × **b**) · **a**|. Disse seks uttrykkene må derfor være like.

- 1.4.5 Korollar

  Volumet av pyramiden utspent av de tre vektorene **a, b, c** er 1/6 |(**a** × **b**) · **c**|

✗ **1.5 – Matriser**

- m x n-matriser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  *m* rader/linjer og *n* søyler

- Addisjon/subtraksjon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

  og

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \ldots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \ldots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \ldots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Multiplisere med et tall s

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

- Transponering
  Vi transponerer en matris ved å bytte om rader og søyler

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  Legg merke til at når A er en m x n-matrise, så er $A^T$ er n x m-matrise

- 1.5.1 Definisjon – Multiplikasjon av matrise og søylevektor
  Anta at A er en $m \times n$-matrise og at **b** er en n-dimensjonal søylevektor:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad og \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

  Produktet av A og **b** er da den m-dimensjonale søylevektoren **c** = A**b** gitt ved

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

  Den i-te komponentene i **c** = A**b** fremkommer altså ved at vi tar skalarproduktet av den i-te raden i A med vektoren **b**.
  Legg merke til at produktet A**b** bare er definert når A og **b** passer sammen størrelsesmessig; **b** må ha like mange komponenter som A har søyler. Observer også at produktet A**b** er en søylevektor med like mange rader som A.

- Regneregler:
  (s er et tall, A og B matriser, **b** vektor)

  (A + B)**b** = A**b** + B**b**
  (sA)**b** = s(A**b**)
  A(**b** + c) = A**b** + Ac
  A(s**b**) = s(A**b**)

✗ **1.6 – Multiplikasjon av matrise**r

- 1.6.1 Definisjon – Matriseprodukt
  Anta at A er en $m \times n$-matrise og at B er en $n \times k$matrise. Da er matriseproduktet C = AB definert som $m \times k$-matrisen C med komponenter

  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdot \cdot \cdot + a_{in}b_{nj}$

  Vi får altså den ij-te komponenten i C ved å ta skalarproduktet av den i-te raden i A med den j-te søylen i B.

  Figuren viser grafisk hvordan vi finner det ij-te elementet i produktmatrisen C: Vi tar skalarproduktet av den i-te raden i A med den j-te søylen i B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

  Bemerkning: Det er en annen måte å tenke på matriseproduktet AB på som er nyttig i mange sammenhenger. Dersom $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ er søylene i B, skriver man ofte $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k)$. Det er lett å sjekke at

  $AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_k)$

  Vi får altså søylene i AB ved å gange søylene i B med A.

Legg merke til at matriseproduktet AB bare er definert når A og B passer sammen i størrelse: radene i A må være like lange som søylene i B. Dette betyr at den "siste" dimensjonen n i m × n-matrisen A er lik den "første" dimensjonen n i n × k-matrisen B. Legg merke til at hvis vi stryker de to n-ene i m× n og n × k, sitter vi igjen med størrelsen m× k til produktmatrisen C.

- 1.6.2 Setning – Regneregler for matrisemultiplikasjon
  I hvert av punktene nedenfor antar vi at A, B og C er matriser slik at regneoperasjonene er definert.
  (i) (AB)C = A(BC)
  (ii) A(B + C) = AB + AC
  (iii) (B + C)A = BA + CA
  (iv) (sA)B = A(sB) = s(AB) for alle tall s
  (v) (AB)T = BTAT

- 1.6.3 Setning
  Hvis A er en m × n-matrise og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , så er
  |Ax| ≤ ||A|| |x|
  Med andre ord:
  Når vi ganger vektoren x med matrisen A, så øker lengden maksimalt med en faktor ||A||.

## ✗ 1.7 – Identitetsmatriser og inverse matriser

- Identitetsmatriser
  kvadratiske matriser, dvs. Matriser med like mange rader som søyler.
  Matrisene vil altså være n×n-matriser for et helt tall n.
  En spesiell slik matrise er identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

  som har 1-ere på diagonalen og 0-er overalt ellers. Ganger du en annen n × n-matrise A med $I_n$, ser du at:
  $AI_n = A$ og $I_nA = A$
  Uansett om vi multipliserer A med In fra høyre eller venstre, får vi altså A tilbake. Blant tall er det bare 1 som har en tilsvarende egenskap; ganger vi et tall med 1, får vi tallet tilbake.
  Identitetsmatrisen $I_n$ spiller derfor mye av den samme rollen for matrisemultiplikasjon som 1 gjør for vanlig multiplikasjon

- 1.7.1 Definisjon
  Anta at A er en n×n-matrise. En n×n-matrise X kalles en invers matrise til A dersom
  $AX = XA = I_n$
  (siden matrisemultiplikasjon ikke er kommutativ, krever vi å få $I_n$ som svar uansett hvilken side vi multipliserer fra).
  Som allerede nevnt har alle tall bortsett fra 0 en invers. For matriser er det mer komplisert; det finnes mange matriser som ikke har invers! Vi skal komme tilbake til spørsmålet om når en matrise har en invers etter hvert, men foreløpig nøyer vi oss med å vise noe enklere — nemlig at ingen matrise har mer enn ´en invers.

– 1.7.2 Setning
En $n \times n$-matrise har høyst ´en invers.

Bevis: Anta at både X og Y er inverser til A. Da har vi

$$X = I_n X = (YA)X = Y(AX) = YI_n = Y$$

Altså er de to inversene like. |

Nå som vi vet at det finnes høyst ´en invers, kan vi være mer konkrete i språkbruken

– 1.7.3 Definisjon
En $n \times n$-matrise A kalles inverterbar dersom den har en invers, og den inverse matrisen betegnes med $A^{-1}$. En matrise som ikke er inverterbar, kalles singulær.
Selv om vi ikke skal utvikle noen teori for hvordan man finner inverse matriser på det nåværende tidspunkt (det får vente til kapittel 4) er det instruktivt å se på noen enkle eksempler.

– 1.7.4 Setning
Anta at A og B er inverterbare $n \times n$-matriser. Da er
(i) sA inverterbar for alle tall $s \neq 0$, og $(sA)^{-1} = s^{-1}A^{-1}$
(ii) AB inverterbar, og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(iii) $A^T$ inverterbar, og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
(iv) $A^{-1}$ er inverterbar og $(A^{-1})^{-1} = A$.

✗ **1.8 – Determinanter, arealer og volumer**

– 1.8.1 Setning – Determinanten

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Determinanten er positiv dersom vektorparet (**a**, **b**) er positivt orientert (vinkelen fra a til b er mindre enn 180°) og negativ dersom paret er negativt orientert (vinkelen fra a til b er større enn 180°). Arealet til parallellogrammet utspent av **a** og **b** er lik tallverdien til determinanten.

Bemerkning:
Matematikere sier at determinanten gir oss arealet med fortegn (eller orientering). Det kan virke merkelig å knytte fortegn til areal, men spesielt når man skal studere arealet til flater, viser det seg viktig å holde styr på retningen — det er i mange sammenhenger viktig å vite hva man skal regne som flatens “overside/underside” eller “utside/innside”. Som vi skal se senere i denne seksjonen, kan sammenhengen mellom determinant og “areal med fortegn” generaliseres til tre dimensjoner.

- Eksempel:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

– 1.8.2 Korollar
Arealet til trekanten med sider **a** og **b** er:
$1/2 \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$

– 1.8.3 Setning
For 2 × 2-matriser gjelder:

- (i) det($I_2$) = 1 (husk at $I_2$ er identitetsmatrisen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ )
- (ii) Dersom vi bytter om to rader, så bytter determinanten fortegn (dvs. det(**a**, **b**) = −det(**b**, **a**)).
- (iii) Dersom vi ganger alle elementene i en rad med et tall s, så forandrer også matrisen seg med en faktor s (dvs. det(s**a**, **b**) = s det(**a**, **b**) og det(**a**, s**b**) = s det(**a**, **b**)).
- (iv) Dersom vi adderer et tall ganger en rad til en av de andre radene, endrer ikke determinanten verdi (dvs. det(**a** + s**b**, **b**) = det(**a**, **b**) og det(**a**, **b** + s**a**) = det(**a**, **b**)).

– 3 x 3-determinanter

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Derfiner ved:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

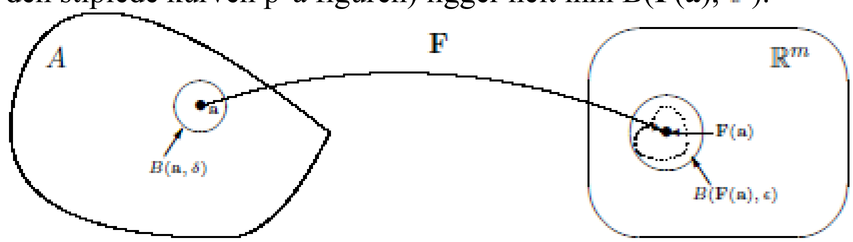
– 1.8.4 Setning
Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene **a**, **b, c** er: | det(**a**, **b**, **c**)|
Volumet av pyramiden utspent av **a**, **b**, **c** er: 1/6 | det(**a, b**, **c**)|

– 1.8.5 Setning
For 3 × 3-matriser gjelder:

(i) det($I_3$) = 1 (husk at $I_3$ er identitetsmatrisen )
(ii) Dersom vi bytter om to rader, så bytter determinanten fortegn (det vil f.eks. si at det(**a, b, c**) = −det(**c, b, a**)).
(iii) Dersom vi ganger alle elementene i en rad med et tall s, så forandrer også matrisen seg med en faktor s (det vil f.eks. si at det(**a**, s**b**, **c**) = s det(**a, b, c**)).
(iv) Dersom vi adderer et tall ganger en rad til en av de andre radene, endrer ikke determinanten verdi (det vil f.eks. si at det(**a, b**, **c**+s**a**) = det(**a, b, c**)).

## *KAP2 – FUNKSJONER FRA $R^n$ TIL $R^m$*

- **2.1 – Funksjoner av flere variable**
  –
- **2.2 – Kontinuerlige funksjoner**
  – 2.2.1 Definisjon
  Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{a} \in A$ . En funksjon $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$
  er kontinuerlig i **a** dersom det til enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at
  $$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \epsilon \textit{ for alle } \mathbf{x} \in A \textit{ slik at } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$
  Figuren nedenfor illustrerer definisjonen: Gitt en kule B(**F**(**a**), $\epsilon$ ) om punktet **F**(**a**), kan vi finne en kule B(**a**,$\delta$) om punktet **a** slik at bildet av B(a, $\delta$ )
  (markert med den stiplede kurven p°a figuren) ligger helt inni B(**F**(**a**), $\epsilon$ ).



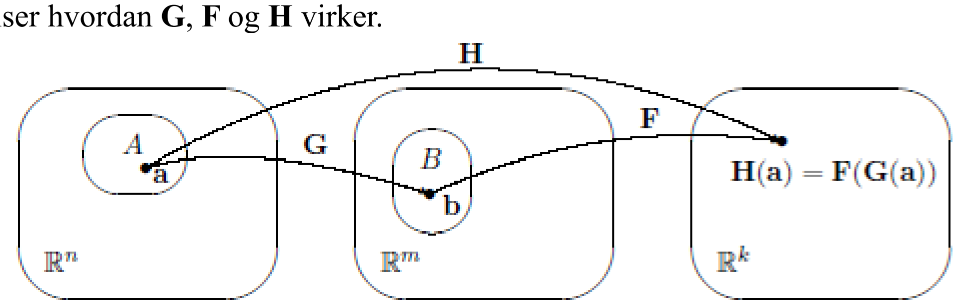

  Figur 1: Kontinuitet i punktet **a**

  Siden kontinuitet er definert på akkurat samme måte som for funksjoner av en variabel, har vi de samme reglene med (nesten) de samme bevisene.

  – 2.2.2 Setning
  Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$ , og at funksjonene $\mathbf{F}, \mathbf{G} : A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige i $\mathbf{a} \in A$ .
  Da er **F** + **G**, **F** − **G** og **F** · **G** kontinuerlige i **a**. Det er også **F**/**G** forutsatt at **F** og **G** tar verdier i R (slik at divisjon gir mening) og **G**(**a**) ≠ 0.

  – 2.2.3 Setning
  Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, og to funksjoner $\mathbf{G} : A \to B$, $\mathbf{F} : B \to \mathbb{R}^k$
  (se figuren nedenfor). Dersom **G** er kontinuerlig i punktet **a**, og **F** er kontinuerlig i punktet
  **b** = **G**(**a**), så er den sammensatte funksjonen **H**(x) = **F**(**G**(x)) kontinuerlig i **a**.

  Beviset er akkurat som for funksjoner av ´en variabel (se setning 5.1.7 i Kalkulus) for hjelp).
  Figur 2 viser hvordan **G**, **F** og **H** virker.




  Figur 2: Sammensetning av funksjoner

  Når vi skal bruke reglene ovenfor til å vise at en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig, lønner det seg ofte å skrive den på komponentform:
  $$\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))$$
  Det neste resultatet forteller oss at **F** er kontinuerlig hvis hver komponent $F_i$ er kontinuerlig.

- 2.2.4 Setning
  Anta at $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable med komponenter
  $$\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))$$
  Da er **F** kontinuerlig i et punkt $\mathbf{a} \in A$ hvis og bare hvis hver komponent $F_i$ er kontinuerlig i **a**

- 2.2.5 Definisjon
  En funksjon **F** kalles kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i alle punkter i sitt definisjonsområde.

✗ **2.3 – Grenseverdier**

- 2.3.1 Definisjon
  La A være en delmengde av $R^n$. Et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et opphopningspunkt for A dersom enhver kule B(**a**, r) om **a** inneholder uendelig mange punkter fra A.

- 2.3.2 Definisjon
  La $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable og anta at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ er et opphopningspunkt for A. Vi sier at $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ er grenseverdien for **F** i punktet **a** dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at
  $$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon \textit{ for alle } \mathbf{x} \in A \textit{ slik at } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$
  Vi skriver $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Dersom **a** ikke er et opphopningspunkt for A, er grenseverdien ikke definert.

- 2.3.3 Setning
  La $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ er et opphopningspunkt for A. Anta at komponentene til **F** er gitt ved
  $$\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))$$
  og la b være en vektor med komponenter $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Da er
  $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$
  hvis og bare hvis
  $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_i(\mathbf{x}) = b_i \textit{ for alle } i$$
- 2.3.4 Setning – Regneregler for grenseverdier
  Anta at $\mathbf{F}, \mathbf{G} : A \to \mathbb{R}^m$ er to funksjoner av n variable og at $\mathbf{a} \in A$ er et opphopningspunkt for A. Dersom $\lim_{x\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ *og* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$, så er:
  *a)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.
  *b)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.
  *c)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
  *d)* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{G}(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ *forutsatt at* $\mathbf{F}$ *og* $\mathbf{G}$ *tar verdier i* $\mathbb{R}$ *og* $\mathbf{B} \neq 0$.

- 2.3.5 Setning
  La $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $\mathbf{a} \in A$ er et opphopningspunkt for A. Da er **F** kontinuerlig i **a** hvis og bare hvis $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$

✗ **2.4 – Derivasjon av skalarfelt**

– 2.4.1 Definisjon
Anta at funksjonen $f : A \to \mathbb{R}$ er definert på en delmengde A av $R^n$ og at **a** er et indre punkt i A. Tenk på $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ som en vektor. Den retningsderiverte til f i punktet **a** og retningen **r** er gitt ved

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

forutsatt at denne grensen eksisterer.

– 2.4.2 Definisjon
La $f: A \to \mathbb{R}$ være en funksjon av n variable, og la **a** være et indre punkt i A. Den i-te partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er den retningsderiverte av f i retning av den i-te enhetsvektoren $\mathbf{e}_i$; det vil si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a};\mathbf{e}_i)$$

partiellderiverte er stigningstallene til funksjonen parallelt med koordinataksene

– 2.4.3 Definisjon
Anta at de partiellderiverte til f eksisterer i punktet $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Da kalles

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$$

gradienten til f i punktet **a**.

– 2.4.4 Definisjon
Anta at $f: A \to \mathbb{R}$ er definert på en delmengde A av $R^n$ og at **a** er et indre punkt i A. Anta videre at alle de partiellderiverte til f eksisterer i punktet **a**. Vi sier at f er deriverbar i **a** dersom funksjonen

$$\sigma(\mathbf{r}) = f(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{r}$$

går mot 0 hurtigere enn |r|, dvs.

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} = 0$$

– 2.4.5 Setning
Anta at $f: A \to \mathbb{R}$ er derivebar i **a**. Da er $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{r}$ for alle **r**.

– 2.4.6 Teorem
La $f : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable. Anta at alle de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ er definert i en omegn om $\mathbf{a} \in A$ , og at de er kontinuerlige i **a**. Da er f deriverbar i **a.**

– 2.4.7 Setning
Anta at f er deriverbar i **a**. Da peker gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ i den retningen hvor f vokser hurtigst i punktet **a**, og stigningstallet til f i denne retningen er $|\nabla f(\mathbf{a})|$.

– 2.4.8 Setning
Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av n variable. Dersom f er deriverbar i et punkt $\mathbf{a} \in A$, så er f kontinuerlig i **a**.

- ✗ **2.5 – Partiellderiverte av høyere orden**
  - 

- ✗ **2.6 – Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner**
  - 2.6.1 Definisjon
    Anta at $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable og at **a** er et indre punkt i A. Vi sier at **F** er deriverbarderiverbar i **a** dersom funksjonen

    $$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\mathbf{r}$$

    går mot null fortere enn |r|, dvs. At

    $$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

    *(legg merke til at $\boldsymbol{\sigma}$ nå er en vektorvaluert funksjon med verdier i $\mathbb{R}^m$).*
  - 2.6.2 Setning
    En funksjon $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ er deriverbar i et indre punkt $\mathbf{a} \in A$ hvis og bare hvis hver komponent $F_i$ er deriverbar i **a**.

  - 2.6.3 Korollar
    Anta at $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable og at **a** er et indre punkt i A. Dersom alle komponentene $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ i Jacobi-matrisen er definert i en omegn rundt **a** og er kontinuerlige i **a**, så er **F** deriverbar i **a**.

# DIVERSE

✗ **Div**

- Omforme

$$f(x)=e^{\ln|f(x)|}$$

- Fullføre kvadratet:

$$F(x)=ax^2+bx+c$$

$$For\ å\ fullføre\ kvadratet:(\frac{b}{2})^2$$

- Formel for buelengde:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

✗ **Uttrykk:**

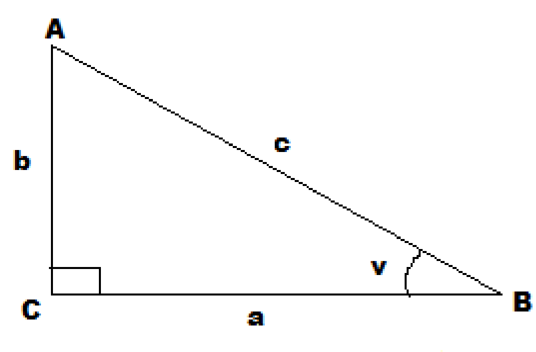
- Injektiv (en-entydig)
  En verdi fører til et funksjonsuttrykk. Det vil si:
  det finnes ikke to verdier som gir samme funksjonsuttrykk

- Monoton funksjon

✗ **Trigonometri**

- Grunndefinisjonene:

$$\sin v=\frac{motstående\ katet}{hypotenus}=\frac{b}{c}$$




$$\cos v=\frac{hosliggende\ katet}{hypotenus}=\frac{a}{c}$$

$$\tan v=\frac{motstående\ katet}{hosliggende\ katet}=\frac{b}{a}$$

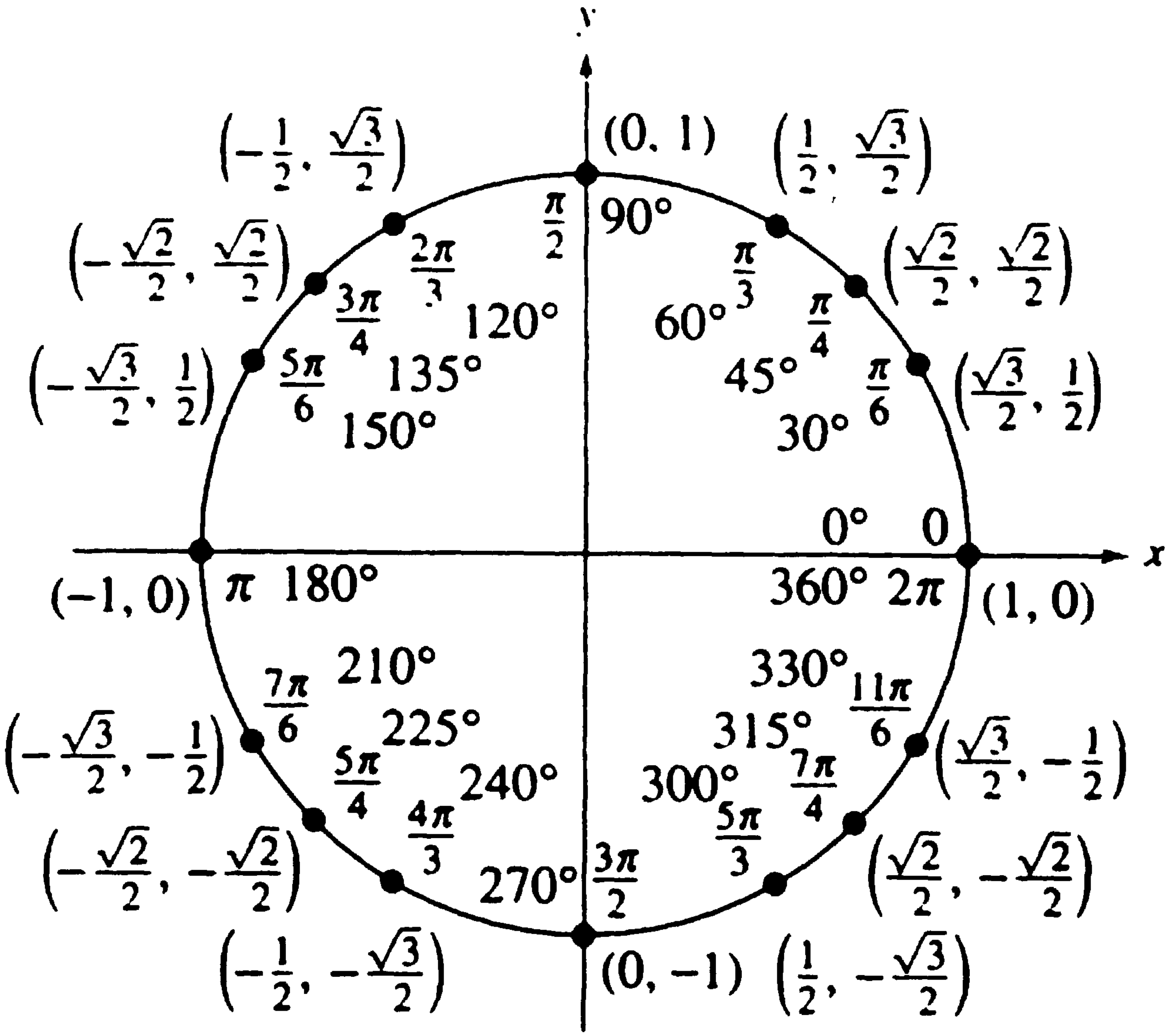
- Cosinussetningen:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

- Sinussetningen:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

-



y
x
(0, 1)
π/2 90°
(1/2, √3/2)
π/3 60°
(√2/2, √2/2)
π/4 45°
(√3/2, 1/2)
π/6 30°
0° 0
360° 2π
(1, 0)
(−1/2, √3/2)
2π/3 120°
(−√2/2, √2/2)
3π/4 135°
(−√3/2, 1/2)
5π/6 150°
(−1, 0)
π 180°
7π/6 210°
(−√3/2, −1/2)
5π/4 225°
(−√2/2, −√2/2)
4π/3 240°
(−1/2, −√3/2)
270° 3π/2
(0, −1)
300° 5π/3
(1/2, −√3/2)
315° 7π/4
(√2/2, −√2/2)
330° 11π/6
(√3/2, −1/2)