

FORMELSAMLING FOR MAT 1110

Ekspontialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
 $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Integraler

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C$$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C$$

Rekker

Taylorrekken til f om a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Geometriske rekker: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergensområde $(-1, 1)$

Binomiske rekker: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, konvergensradius 1 for $\alpha \notin \mathbb{N}$

Noen Taylorrekker: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ konvergensområde } [-1, 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ konvergensområde } [-1, 1]$$

Taylor's formel: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n \, dt =$
 $= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

Funksjoner av flere variable

Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$

Kjerneregelen. På matriseform: $\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\mathbf{G}'(\mathbf{a})$

På komponentform: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$

Linearisering av F : $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{a})$

Normalvektor: $\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Tangentplan: $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)$

Newtons metode: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$

Annenderiverttesten: Anta at (a, b) er et stasjonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$,

$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Da gjelder:

- i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
- ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
- iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Lagranges multiplikator metode: $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a}) \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})$
(eller gradientene på høyre side lineært avhengige).

Derivasjon av omvendt funksjon: $(\mathbf{F}^{-1})'(\mathbf{y}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x})^{-1}$ der $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Derivasjon av implisitt funksjon: Hvis $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$, så $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Hastighet: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$

Fart: $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \cdots + x'_n(t)^2}$

Akselerasjon: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''_1(t), x''_2(t), \dots, x''_n(t))$

Banekselerasjon: $a(t) = v'(t)$

Buelengde: $s = L(a, b) = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \cdots + x'_n(t)^2} dt$

Linjeintegral av skalarfelt: $\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))v(t) dt$

Linjeintegral av vektorfelt: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt$

Integral av gradient: $\int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$

Nødvendig betingelse for konservativt felt: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ alle \mathbf{x}, i, j .

Multiple integraler

Skifte av variabel: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$

Polarkoordinater: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, Jacobideterminant: r

Sylinderkoordinater: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, Jacobideterminant: r

Kulekoordinater: $x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi,$

Jacobideterminant: $\rho^2 \sin \phi$

Flateintegral: Generelt: $\iint_S f dS = \iint_R f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| dudv$

For $z = g(x, y)$: $\iint_S f dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy$

Kjeglensnitt

Parabel: $(y-n)^2 = \pm 4a(x-m)$ eller $(x-m)^2 = \pm 4a(y-n),$ brennvidde: $a > 0$

Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$ brennvidde: $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ eller $\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1,$
brennvidde: $c = \sqrt{a^2 + b^2},$ asymptoter: $y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$

Vektorregning og determinanter

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regneregler for determinanter: $\det(AB) = \det(A) \det(B), \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \det(A^T) = \det(A)$

Matriser og lineæravbildninger

Def. av lineæravbildning: (i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x}),$ (ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$

Def. av affinavbildning: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$

Matrisen til en lineæravbildning \mathbf{T} : $A = (\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2), \dots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n))$

Eigenvektor \mathbf{v} og egenverdi λ : $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Betingelse for egenverdi: $\det(\lambda I_n - A) = 0$